Blad 1/2

1 a De vergelijking $A\underline{x}=\underline{b}$ heeft een unieke oplossing als $\det(A)\neq 0$

$$\Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & k \\ k+2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6+k^2+2k+8-2k-4-3k-8$$

$$= k^2-3k+2 \neq 0 \Rightarrow (k-1)(k-2)\neq 0 \Rightarrow k\neq 1 \wedge k\neq 2$$

5

b Gauss-eliminatie

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & k & 4 \\ k+2 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to II - \frac{4}{3}I} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{3} & k-\frac{8}{3} & -4 \\ k+2 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III \to III - \frac{k+2}{3}I} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{3} & k-\frac{8}{3} & -4 \\ 0 & 1-\frac{k+2}{3} & 2-\frac{2k+4}{3} & 6-2k-4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{3} & k-\frac{8}{3} & -4 \\ 0 & \frac{1-k}{3} & \frac{2-2k}{3} & 2-2k \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III \to III + (1-k)II} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{3} & k-\frac{8}{3} & -4 \\ 0 & 0 & \frac{2-2k}{3}+\frac{1-k}{k-\frac{8}{3}} & 2-2k+(1-k)\cdot -4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3k-8}{3} & -4 \\ 0 & 0 & \frac{k^2-3k+2}{3} & 2k-2 \end{array}\right)$$

De vergelijking is strijdig voor $k=2$, want dan is de onderste rij: $(0\ 0\ 0 \mid 2)$ (Voor $k=1$ is de onderste rij $(0\,0\,0 \mid 0)$, dus is dan niet strijdig)

5

c Voor $k=1$ zijn er oneindig veel oplossingen, want dan is de onderste rij $(0\,0\,0 \mid 0)$. uitleg

3

2a $A$ rij-equivalent met $B$ wil zeggen dat er een eindig aantal elementaire matrices bestaat waarvoor geldt:

5

$$A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 B \qquad k \in \mathbb{N}$$

B resulteert uit A.

b $A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 B \iff E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} A = E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} E_k E_{k-1} \cdots E_1 B$
$\iff E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} A = (I)^k B = B \qquad k \in \mathbb{N}$

$E_1^{-1}, \ldots, E_{k-1}^{-1}, E_k^{-1}$ zijn ook elementaire matrices dus bestaat er ook een eindig aantal elementaire matrices waarvoor geldt dat
5 $B$ rij-equivalent is met $A$, want:

$$B = E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} A \qquad k \in \mathbb{N}$$

c $A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 B$ en $B = F_l F_{l-1} \cdots F_1 C \qquad k, l \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 (F_l F_{l-1} \cdots F_1 C) = E_k E_{k-1} \cdots E_1 F_l F_{l-1} \cdots F_1 C$$

5 Er bestaat dus een eindig aantal, $(k+l) \in \mathbb{N}$, matrices zodanig dat $A$ rij-equivalent met $C$ is.

d $m = n$ en $A, B$ zijn niet-singulier $\Rightarrow$
$I = I \Rightarrow A^{-1}A = B^{-1}B \Rightarrow AA^{-1}A = AB^{-1}B \Rightarrow$
$IA = AB^{-1}B \Rightarrow A = (AB^{-1})B$

---

$A, B$ niet-singulier $\Rightarrow A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 I$ en $B = F_l F_{l-1} \cdots F_1 I$
$\Rightarrow F_1^{-1} \cdots F_{l-1}^{-1} F_l^{-1} B = (I)^{l+1} = I$ en $A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 I \Rightarrow$
$A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 F_1^{-1} \cdots F_{l-1}^{-1} F_l^{-1} B \qquad k, l \in \mathbb{N}$

Er bestaat een eindig aantal, $(k+l) \in \mathbb{N}$ matrices zodanig dat $A$ ~~is~~ rij-equivalent ~~zijn~~ met $B$ is.

vervolg →

Blad 1/2

3d $A, B$ niet-singulier $\Rightarrow A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 I$ en $B = F_l F_{l-1} \cdots F_1 I$
$\Rightarrow E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} A = (I)^{k+1} = I$ en $B = F_l F_{l-1} \cdots F_1 I \Rightarrow$
$B = F_l F_{l-1} \cdots F_1 E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} A \qquad k, l \in \mathbb{N}$.

Er bestaat een eindig aantal, $(k+l) \in \mathbb{N}$, matrices zodanig dat $B$ rij-equivalent is met $A$

Dus ~~is~~ zijn $A$ en $B$ rij-equivalent.

3 a $AXB = A+B \Rightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}$

$\Rightarrow IXI = X = (A^{-1}A + A^{-1}B)B^{-1} = A^{-1}AB^{-1} + A^{-1}BB^{-1} = IB^{-1} + A^{-1}I$

5 $= B^{-1} + A^{-1}$

~~Aanname:~~

b $AB = BA \Rightarrow (AB)^T \overset{(1)}{=} (BA)^T \overset{(2)}{=} A^T B^T$

5 (1) Gegeven $AB = BA$

(2) Rule number 3 for transposes.

6 ~~De inverse is uniek, dus~~ als A Inverteerbaar is

$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad I = (I)^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$ (1)

$I = (I)^T = (A^{-1}A)^T = A^T (A^{-1})^T = I$ (2)

5 De inverse van $A^T$ is dus $(A^{-1})^T$, dus $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

zie (1) en (2)

~~$(A^{-1})^T A^T = I = (A^T)^{-1} A^T$~~

~~$A^{-1}A$~~

Kijken of dit klopt:

~~A~~ $I = (I)^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$

$I = (A^T)^{-1} A^T$

Dus $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&5&0&2&0&1&0&0\\ 0&0&3&0&0&0&1&0\\ 0&3&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \xRightarrow{IV \to IV - \frac{3}{5} II} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&5&0&2&0&1&0&0\\ 0&0&3&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1-\frac{6}{5}&0&-\frac{3}{5}&0&1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{II \to II + 10 IV} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&5&0&0&0&1-6&0&10\\ 0&0&3&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&-\frac{1}{5}&0&-\frac{3}{5}&0&1 \end{array}\right) \xRightarrow[\substack{III \to \frac{III}{3} \\ IV \to IV \cdot -5}]{II \to \frac{II}{5}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&-1&0&2\\ 0&0&1&0&0&0&\frac{1}{3}&0\\ 0&0&0&1&0&3&0&-5 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \cancel{\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-\frac{47}{15}&0&2\\ 0&0&\frac{1}{3}&0\\ 0&\frac{22}{3}&0&-5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&0&2\\ 0&0&\frac{1}{3}&0\\ 0&3&0&-5 \end{pmatrix}$$

Of: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj} A$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5&0&2\\ 0&3&1\\ 3&0&1 \end{vmatrix} = 15 - 18 = -3$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -3&0&0&0\\ 0&3&0&-9\\ 0&0&-1&0\\ 0&-6&0&15 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3&0&0&0\\ 0&3&0&-6\\ 0&0&-1&0\\ 0&-9&0&15 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&0&+2\\ 0&0&+\frac{1}{3}&0\\ 0&3&0&-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&0&2\\ 0&0&\frac{1}{3}&0\\ 0&3&0&-5 \end{pmatrix}$$

8

10

5 a

$$\det(A) = x^3 + 1 + -1 + x - x - x$$
$$= x^3 - x$$

8 5

b A is singulier als $\det(A) = 0$

$\Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 0 \vee x^2 = 1 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$

5 8

$$\begin{matrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x & 1 & 1 \\ 0 & x - \frac{1}{x} & -1 - \frac{1}{x} \\ 0 & -1 + \frac{1}{x} & x + \frac{1}{x} \end{matrix}$$

A is singulier als $x$ een element is van $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & \frac{x^2-1}{x} & \frac{-x-1}{x} \\ 0 & \frac{1-x}{x} & \frac{x^2+1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & \frac{x^2-1}{x} & \frac{-x-1}{x} \\ 0 & 0 & \frac{x^2+2x}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & x+1 \end{pmatrix}$$

$$x = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[I+II]{III \to III +} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

is singulier want onderste rij is $(0\ 0\ 0)$

$$x = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \to III + II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = -1 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\left(\frac{II - I}{2}\right)]{III \to III +} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

is singulier, want onderste rij is $(0\ 0\ 0)$

6 $L$ $A=(a_{ij})$ $n\times n$ $B=(b_{ij})$ $n\times n$

$\operatorname{tr} A=0$ , $\operatorname{tr} B=0 \Rightarrow A\in M,\ B\in M$

① $A+B=C$ $(c_{ij})=(a_{ij})+(b_{ij})$ $c_{ij}=\cancel{\ldots}\ a_{ij}+b_{ij}$ $\forall 1\le i,j\le n$

Voor $i=j$ $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=0+0=0$ voor alle $1\le i\le n$

$\Rightarrow \operatorname{tr} C=0$

② $\alpha A=\cancel{\ldots}\ D$ $(d_{ij})=\alpha(a_{ij})$ $d_{ij}=\alpha a_{ij}$ $\forall 1\le i,j\le n$

Voor $i=j$ $d_{ij}=\alpha a_{ij}=\alpha\cdot 0=0$ voor alle $1\le i\le n$

$\Rightarrow \operatorname{tr} C=0$

Uit ① en ② volgt dat $C\in M$

Zie bewijs achterop. $\rightarrow$

6 A1 $\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y}=\underset{\sim}{y}+\underset{\sim}{x}$

A2 $(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y})+\underset{\sim}{z}=\underset{\sim}{x}+(\underset{\sim}{y}+\underset{\sim}{z})$

A3 $\underset{\sim}{x}+0=\underset{\sim}{x}$

A4 $\underset{\sim}{x}+(-\underset{\sim}{x})=0$

A5 $\alpha(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y})=\alpha\underset{\sim}{x}+\alpha\underset{\sim}{y}$

A6 $(\alpha+\beta)\underset{\sim}{x}=\alpha\underset{\sim}{x}+\beta\underset{\sim}{x}$

A7 $(\alpha\beta)\underset{\sim}{x}=\alpha(\beta\underset{\sim}{x})$

A8 $1\cdot\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{x}$

$A=(a_{ij})$ en $\operatorname{tr} A=0$ $\quad A\in M$

$B=(b_{ij})$ en $\operatorname{tr} B=0$ $\quad B\in M$

$C=(c_{ij})$ en $\operatorname{tr} C=0$ $\quad C\in M$

1 $A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(b_{ij})+(a_{ij})=B+A$

2 $(A+B)+C=((a_{ij})+(b_{ij}))+(c_{ij})=(a_{ij})+(b_{ij})+(c_{ij})=(a_{ij})+((b_{ij})+(c_{ij}))=A+(B+C)$

3 $\cancel{(A+B)}\ A+0=(a_{ij})+0=(a_{ij})=A$

4 $(A)+(-A)=(a_{ij})+(-(a_{ij}))=(a_{ij})-(a_{ij})=0$

5 $\alpha(A+B)=\alpha((a_{ij})+(b_{ij}))=\alpha(a_{ij})+\alpha(b_{ij})=\alpha A+\alpha B$

6 $(\alpha+\beta)A=(\alpha+\beta)(a_{ij})=\alpha(a_{ij})+\beta(a_{ij})=\alpha A+\beta A$

7 $(\alpha\beta)A=(\alpha\beta)(a_{ij})=\alpha\beta(a_{ij})=\alpha(\beta(a_{ij}))=\alpha(\beta A)$

8 $1\cdot A=1\cdot(a_{ij})=a_{ij}=A$

$\forall\ 1\leq i,j\leq n$

Omdat aan alle 8 axioma's is voldaan is M een vectorruimte

15

8